

Chapitre 5

Nombres complexes

Plan du chapitre

1	Introduction	2
1.1	Le nombre i , l'ensemble $\mathbb{C}$	2
1.2	Opérations $+$, $-$, $\times$ avec les complexes	2
1.3	Partie réelle et partie imaginaire	2
1.4	Nombres complexes réels, nombres complexes imaginaires purs	5
1.5	Sommes de n complexes	5
2	Conjugué, module, division	6
2.1	Conjugué et interprétation géométrique d'un complexe	6
2.2	Module	7
2.3	Division de complexes et forme algébrique de $\frac{u}{v}$	8
2.4	Inégalités triangulaires	9
2.5	Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire	10
3	La forme exponentielle (ou trigonométrique)	10
3.1	La notation $e^{i\theta}$	10
3.2	Propriétés de la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$	11
3.3	La forme exponentielle	12
3.4	Argument et interprétation géométrique de $re^{i\theta}$	13
3.5	La forme fait la force – Passer d'une forme à l'autre	14
4	Application des complexes à la trigonométrie	15
4.1	Linéarisation	15
4.2	Dé-linéarisation	17
4.3	Méthode de l'angle moitié et nouvelles formules de trigonométrie	17
5	Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$	19
5.1	Racine carrée d'un nombre complexe	19
5.2	Équations du second degré à coefficients complexes	21
5.3	Relations coefficients racines	22
5.4	Racines n -ième de l'unité	23
5.5	Racines n -ième d'un complexe ω	24
6	Exponentielle complexe	25
7	Géométrie – alignement, orthogonalité de vecteurs	26
7.1	Cercle et disque du plan complexe	26
7.2	Propriétés de l'argument	26
7.3	Alignement de vecteurs	27
8	Méthodes pour les exercices	30

1 Introduction

1.1 Le nombre i , l'ensemble $\mathbb{C}$

On admet l'existence d'un nombre, noté i , qui vérifie $i^2 = -1$. Ce nombre i n'est pas dans $\mathbb{R}$, car tout carré d'un réel est positif.

Définition 5.1

On appelle (nombre) complexe tout nombre qui s'écrit sous la forme

$$a + ib$$

avec a et b deux réels.

Notation. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. On utilise en général les lettres z , u et v pour désigner des nombres complexes.

Ainsi, tout nombre complexe z peut s'écrire $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition-Théorème 5.2

L'écriture d'un complexe sous la forme $a + ib$ est *unique*, i.e. :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists ! (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad z = a + ib$$

On dit que $a + ib$ est la forme algébrique de z .

Démonstration. Admis. □

1.2 Opérations $+$, $-$, $\times$ avec les complexes

On admet qu'on peut définir les opérations algébriques $+$, $-$, $\times$ pour les nombres complexes : les règles de calcul sont identiques à celles de $\mathbb{R}$, avec la particularité que dès que le calcul fait apparaître i^2 , on peut le remplacer par -1 .

Remarque. Pour "calculer" un nombre complexe, il faut parvenir à l'écrire sous une forme "exploitable" : forme algébrique ou forme exponentielle (qu'on verra plus loin).

Exemple. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer :

- $a + ib + i - 1 = \dots$
- $(a + ib)^2 = \dots$
- $(a + ib)(a - ib) = \dots$
- $i^3 = \dots$
- $i^4 = \dots$
- $(-i)^2 = \dots$

1.3 Partie réelle et partie imaginaire

On a vu que pour tout complexe z , les réels a et b qui vérifient $z = a + ib$ sont déterminés de manière unique. Cela justifie la définition suivante.

Définition 5.3

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

- Le réel a , noté $\operatorname{Re} z$, est appelé la partie réelle de z .
- Le réel b , noté $\operatorname{Im} z$, est appelé la partie imaginaire de z .

En particulier, on a

$$\operatorname{Re}(a + ib) = a$$

et

$$\operatorname{Im}(a + ib) = b$$

et pour tout complexe z , on a : $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.



$\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ sont des nombres **réels** (et pas des nombres complexes !)

Méthode

Pour calculer la partie réelle ou imaginaire d'un complexe, il suffit de le mettre sous forme algébrique !

5.4 ★ Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer $\operatorname{Re}(z^2)$ et $\operatorname{Im}(z^2)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et de $\operatorname{Im}(z)$.

Solution.

Théorème 5.5 – Identification (de la partie réelle et de la partie imaginaire)

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad z = z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z' \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z' \end{cases}$$

Dit autrement, pour tous réels a, b, a', b' , on a :

$$a + ib = a' + ib' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

5.6



Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz = 5$.

Solution.

Remarque. Le nombre complexe $0 + 0i$ est simplement noté 0 . Pour tout complexe z , on a $z = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z = 0 \\ \operatorname{Im} z = 0 \end{cases}$.

Notation. On notera $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls :

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \neq (0, 0)\}$$

Théorème 5.7 – Linéarité de “Re” et de “Im”

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ et λ un nombre *réel*. Alors

$$\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z'$$

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re} z$$

$$\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} z'$$

$$\operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im} z$$

L'hypothèse $\lambda \in \mathbb{R}$ du Théorème 5.7 est indispensable : si λ est un complexe non réel, les deux formules de droite sont fausses.

Exemple. $\begin{cases} \operatorname{Im}(i \times i) = \dots\dots \\ i \operatorname{Im}(i) = \dots\dots \end{cases}$

1.4 Nombres complexes réels, nombres complexes imaginaires purs

- Les complexes de la forme $a + 0i$ avec $a \in \mathbb{R}$ correspondent aux nombres réels. De ce fait, $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, qui correspond aux complexes de la forme $a + 0i$:

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$$

- Tout complexe de la forme $0 + ib$ avec $b \in \mathbb{R}$ est appelé un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté :

$$i\mathbb{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$$

Théorème 5.8 – Caractérisation des réels et imaginaires purs par Re et Im

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} z = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re} z = 0 \iff \exists b \in \mathbb{R} \quad z = ib$



Si on dit que z est un complexe *non réel*, cela signifie que $z \in \dots\dots$, c'est-à-dire que $\dots\dots$



NE JAMAIS écrire d'inégalités avec des complexes non réels Si $z \in \mathbb{R}$, on peut écrire “ $z \leq \dots$ ” ou “ $z \geq \dots$ ”. Ce n'est plus le cas si $z \notin \mathbb{R}$. Par exemple on ne doit pas écrire $4i \geq 2i$. De même, dire qu'un complexe est positif ou négatif n'a aucun sens.

Remarque. Si un complexe z est un réel positif, on pourrait donc écrire “ $z \geq 0$ ”, mais mieux vaut écrire “ $z \in \mathbb{R}_+$ ” pour éviter toute ambiguïté.

1.5 Sommes de n complexes

Étant donné n nombres complexes $z_1, \dots, z_n$, on notera leur somme $\sum_{k=1}^n z_k$ et leur produit $\prod_{k=1}^n z_k$. La propriété de linéarité de Re et de Im se généralise par récurrence immédiate à n complexes :

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} z_k \quad \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} z_k$$

De plus, les formules sommatoires du chapitre précédent se généralisent à des nombres complexes. La démonstration de ces résultats est identique au cas réel. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z, u, v \in \mathbb{C}$:

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k} \quad (\text{avec la convention } 0^0 = 1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u^n - v^n = (u - v) \sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-1-k}$$

On admet qu'on peut diviser un complexe u par un complexe non nul v , et on notera $\frac{u}{v}$ leur quotient :

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & \text{si } z \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

2 Conjugué, module, division

2.1 Conjugué et interprétation géométrique d'un complexe

Définition 5.9

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit le conjugué de z , noté $\bar{z}$, comme étant le complexe

$$\bar{z} = a - ib$$

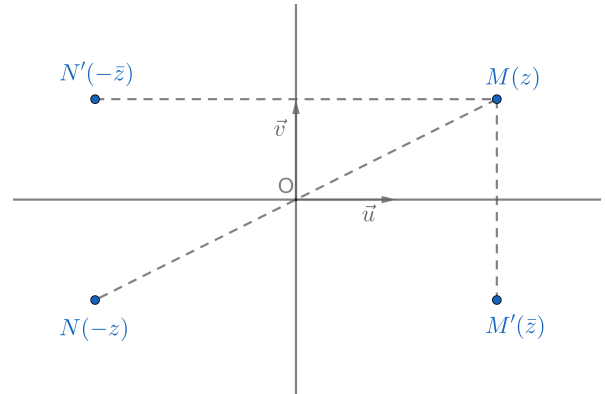
Exemple. $\overline{2 + 6i} = 2 - 6i$ $\bar{3} = 3$ $\overline{8i} = -8i$

On appelle plan complexe le plan usuel avec un repère orthonormé. À tout point M de coordonnées (x, y) , on associe le complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe de M et on note $M(z)$ pour désigner ce point.

Soit $M(z)$ un point du plan complexe.

Le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses.

Le point N d'affixe $-z$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'origine.



Théorème 5.10

Soit $z, u, v \in \mathbb{C}$. On a les relations suivantes :

$$\overline{(\bar{z})} = z \quad \overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v} \quad \overline{uv} = \bar{u}\bar{v} \quad \text{et si } v \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z \quad \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$$

Démonstration. En passant par la forme algébrique de z, u, v ainsi que la définition du conjugué. Toutefois, l'interprétation géométrique permet de retrouver beaucoup de ces propriétés. Montrons par exemple que $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$:

□



On a $z - \bar{z} \in i\mathbb{R}$.

Théorème 5.11 – Caractérisation des réels et imaginaires purs par le conjugué

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$

2.2 Module

Définition 5.12

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. On appelle module de z , noté $|z|$, le réel

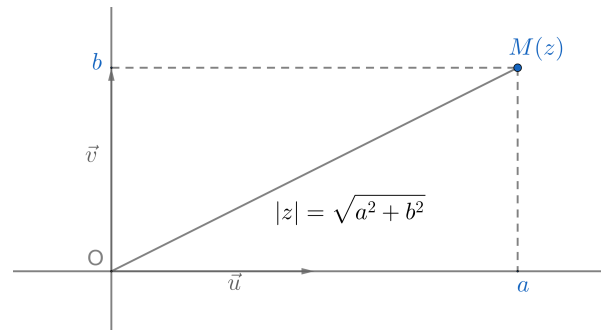
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

Remarque. Si z est un nombre réel, le module et la valeur absolue de z coïncident (la notation ne crée donc pas d'ambiguïté) :

$$z = a + 0i \implies |z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$$

- $|3 - 2i| = \dots$
- $|-5i| = \dots$

Si M est un point d'affixe z , alors $|z|$ correspond à la distance OM , par le théorème de Pythagore.



Théorème 5.13 – Propriétés du module

Pour tous $z, u, v \in \mathbb{C}$,

1. $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
3. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
4. $z\bar{z} = |z|^2$
5. $|uv| = |u| |v|$
6. Si $v \neq 0$, $\left| \frac{u}{v} \right| = \frac{|u|}{|v|}$

Démonstration. Ces propriétés se démontrent en passant par la forme algébrique. Cependant, l'interprétation géométrique aide à se souvenir des trois premières. Avec le point $M(z)$:

1. Dire que $|z| = 0$ revient à dire que la distance OM est nulle, donc que M et O sont confondus. D'où $z = 0$.
2. Les points $M'(\bar{z})$ et $N(-z)$ sont obtenus par symétrie : par construction, $OM = OM' = ON$, ce qui permet de retrouver $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.
3. Enfin, comme $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$, on comprend que $(\operatorname{Re} z)^2 \leq |z|^2$ donc $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$. Idem pour $\operatorname{Im} z$.
4. Montrons que $z\bar{z} = |z|^2$.

□



Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $|z|^2 \neq z^2$! Il y a égalité si $z \in \mathbb{R}$ car le module se confond avec la valeur absolue, mais on ne peut rien dire si $z \in \mathbb{C}$ sans plus de précision.

Théorème 5.14 – Caractérisation des réels et imaginaires purs par le module

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $z \in \mathbb{R}_+ \iff z = |z|$
- $z \in \mathbb{R}_- \iff z = -|z|$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = i|z| \text{ ou } z = -i|z|$

Démonstration. En passant par la forme algébrique, mais là encore, l'interprétation géométrique est assez efficace. □

2.3 Division de complexes et forme algébrique de $\frac{u}{v}$

On a admis plus haut que la fraction $\frac{u}{v}$ n'a un sens que si $v \neq 0$. En particulier, la fraction $\frac{1}{a+ib}$ n'a un sens que si $(a, b) \neq (0, 0)$.

Méthode – Mettre $\frac{u}{v}$ sous forme algébrique

Soit $u \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}^*$. Pour mettre $\frac{u}{v}$ sous forme algébrique, il faut multiplier $\frac{u}{v}$ en haut et en bas par le conjugué du dénominateur, i.e. $\bar{v}$, et utiliser le fait que $v\bar{v} = |v|^2$.

Exemple. Mettre sous forme algébrique :

$$\frac{1+4i}{3-2i} = \dots\dots\dots$$

2.4 Inégalités triangulaires

Théorème 5.15 – Inégalités triangulaires (avec des complexes)

Soit $u, v \in \mathbb{C}$.

1. Identité remarquable :

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\operatorname{Re}(u\bar{v})$$

2. Première inégalité triangulaire :

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

3. Seconde inégalité triangulaire :

$$||u| - |v|| \leq |u - v|$$

Remarque. Si $u, v \in \mathbb{R}$, alors la première formule coïncide avec l'identité remarquable classique car $\operatorname{Re}(u\bar{v}) = uv$.

Démonstration. Montrons la première assertion.

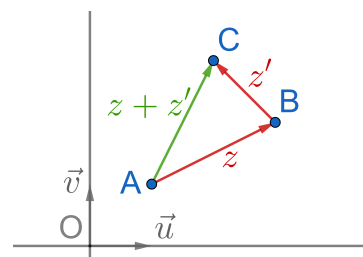
Montrons la seconde assertion.

La seconde inégalité se démontre à partir de la première, comme avec la valeur absolue (cf Chapitre 2). $\square$

Étant donné deux points A et B du plan d'affixe z_A et z_B , on définit l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le complexe $z_B - z_A$. En particulier, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour norme $|z_B - z_A|$, ce qui correspond aussi à la distance AB .

Soit C un troisième point. On note z l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ et z' l'affixe de $\overrightarrow{BC}$. Dans ce cas, $z + z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$. En particulier, $|z + z'|$ représente la distance AC .

L'inégalité triangulaire $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ signifie que la distance AC est inférieure à la distance $AB + BC$, peu importe où se trouve le point B .



2.5 Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Interprétation géométrique de λz . Soit $z \in \mathbb{C}$ et M le point d'affixe z . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note M_λ le point d'affixe λz . Le point M_λ est l'unique point tel que

$$\overrightarrow{OM_\lambda} = \lambda \overrightarrow{OM}$$

Autrement dit, on obtient M_λ en appliquant au point M l'homothétie de centre O et de rapport λ .

Définition 5.16

Soit u et v deux complexes. u et v sont dits positivement liés si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $u = 0$ ou $v = 0$
- Il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u = \lambda v$

On notera que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad u = \lambda v \iff \exists \lambda' \in \mathbb{R}_+^* \quad v = \lambda' u$

On aurait donc pu remplacer la deuxième assertion de la définition par "Il existe $\lambda' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $v = \lambda' u$."

Remarque. Si on note M_u (resp. M_v) le point d'affixe u (resp. v), alors u et v sont positivement liés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OM_u}$ et $\overrightarrow{OM_v}$ sont **colinéaires et de même sens**.

Théorème 5.17 – Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Soit $u, v \in \mathbb{C}$. On a $|u + v| = |u| + |v|$ si et seulement si u et v sont positivement liés.

On peut s'en convaincre avec des affixes. Soit A, B, C trois points du plan de sorte que $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur d'affixe u , $\overrightarrow{BC}$ le vecteur d'affixe v . Dans ce cas $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur d'affixe $u + v$. Or, on constate géométriquement que :

$$\begin{aligned} |u + v| = |u| + |v| &\iff \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| \\ &\iff B \text{ appartient au segment } [AC] \\ &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires et de même sens} \\ &\iff \overrightarrow{OM_u} \text{ et } \overrightarrow{OM_v} \text{ sont colinéaires et de même sens} \\ &\iff u \text{ et } v \text{ sont positivement liés} \end{aligned}$$

3 La forme exponentielle (ou trigonométrique)

3.1 La notation $e^{i\theta}$

Définition 5.18 – Notation exponentielle

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On introduit la notation

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Théorème 5.19

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $|e^{i\theta}| = 1$.

Démonstration.

□

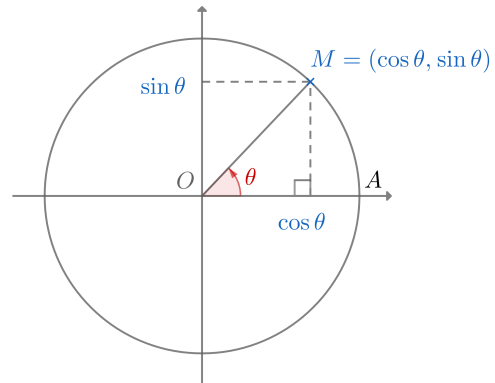
Notation. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. On l'appelle cercle unité ou cercle trigonométrique. On a donc :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Le point M d'affixe $e^{i\theta}$ correspond au point de $\mathbb{U}$ de coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$.

La valeur θ correspond à l'angle orienté que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe des abscisses.

Réciproquement, tout point de $\mathbb{U}$ peut se représenter par un affixe de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. On peut même prendre $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi, \pi]$.


Théorème 5.20 – Caractérisations de $z \in \mathbb{U}$

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z \in \mathbb{U} \iff |z| = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \quad z = e^{i\theta} \iff \exists \theta \in [0, 2\pi[\quad z = e^{i\theta}$$

Pour se rappeler les valeurs particulières de $e^{i\theta}$, on peut tracer un cercle unité :

Exemple.

- $e^{i0} = \dots \quad e^{i\pi} = \dots$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \dots \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = \dots$

3.2 Propriétés de la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$
Théorème 5.21 – Propriétés de l'exponentielle complexe

Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

1. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$ et en particulier $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0 [2\pi]$.

2. **Relation fondamentale :** $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$

3. $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

4. $e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$

5. **Formule de Moivre :** pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Démonstration. On admet la première et la dernière assertion. □

2.

3.

3.3 La forme exponentielle

Définition 5.22 – Forme exponentielle

Soit z un complexe **non nul**. On dit que z admet une forme exponentielle (ou trigonométrique) s'il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

Théorème 5.23

Tout complexe **non nul** z admet une forme exponentielle, et peut donc s'écrire $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

De plus, $r = |z|$.

Démonstration.

□



Si $z = 0$, alors z n'admet pas de forme exponentielle par convention. Ceci permet de garantir que $r = |z|$ est bien strictement positif.

Exemple. Mettre sous forme exponentielle les complexes $z = 2i$ et $u = -i$ et $v = -3$.

Remarque. Étant donné un complexe non nul z , lorsqu'on écrit $z = re^{i\theta}$, la valeur de r est unique et vaut $|z|$, mais la valeur de θ , elle, n'est pas unique. De ce fait, contrairement à la forme algébrique, **il n'y a pas unicité de la forme exponentielle**. Plus précisément, on a la pseudo-identification suivante :

Théorème 5.24 – Pseudo-identification de la forme exponentielle

Soit $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration. On sait que $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$. De ce fait, le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, on suppose que $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$. Alors en passant au module, on trouve $r = r'$. Après division par r , on en déduit $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, donc $\theta \equiv \theta' [2\pi]$. $\square$

Théorème 5.25 – Calculs en forme exponentielle

Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Soit $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$. On a :

1. $zz' = \dots$ (forme exponentielle de zz')
2. $\frac{1}{z} = \dots$ (forme exponentielle de $\frac{1}{z}$)
3. $\frac{z}{z'} = \dots$ (forme exponentielle de $\frac{z}{z'}$)
4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = \dots$ (forme exponentielle de z^n)

3.4 Argument et interprétation géométrique de $re^{i\theta}$

Étant donné un complexe non nul z , on a vu qu'il existe plusieurs valeurs de θ telles que $z = re^{i\theta}$, par exemple :

$$z = -3 = 3e^{i\pi} = 3e^{-i\pi} = 3e^{i3\pi} = \dots$$

Comme vu plus haut, deux de ces valeurs ne diffèrent que d'un multiple de 2π . Cela motive la définition suivante :

Définition 5.26 – Argument

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $r = |z|$. Tout réel θ tel que $z = re^{i\theta}$ est appelé UN argument de z .

On note $\arg z$ un argument *quelconque* de z . Ce nombre n'est défini qu'à un multiple de 2π près. Cependant, il existe un unique argument de z dans $] -\pi, \pi]$. On l'appelle l'argument principal de z .

Comme $\arg z$ n'est défini qu'à 2π près, on évitera d'écrire " $\arg z =$ ", et on écrira toujours " $\arg z \equiv \dots [2\pi]$ ". Par la définition, on a donc :

$$\arg(re^{i\theta}) \equiv \theta [2\pi]$$

Exemple. $\arg(-3) \equiv \arg(3e^{i\pi}) \equiv \pi [2\pi]$ et $\arg(1) \dots$

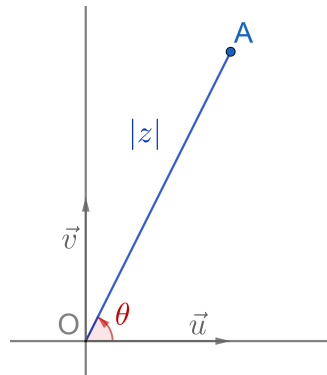


On ne peut écrire " $\arg(z)$ " que si z est un complexe **non nul**.

Soit A un point du plan d'affixe $z \neq 0$. On cherche r et θ tels que $z = re^{i\theta}$.

Comme $r = |z|$, le réel r représente la distance OA , qui est toujours strictement positive (car $z \neq 0$).

Ensuite, on peut prendre pour θ l'angle orienté que fait $\overrightarrow{OA}$ avec l'axe des abscisses. C'est UN argument qui convient.



Exemple. Placer le point complexe $z = 1 - i$ sur le plan complexe et en déduire sa forme exponentielle.

3.5 La forme fait la force – Passer d'une forme à l'autre

On connaît maintenant deux formes pour un nombre complexe : $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, valide pour tout complexe de $\mathbb{C}$, et $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, qui est valide pour tout complexe de $\mathbb{C}^*$. **Comment passer d'une forme à l'autre ?**

Remarque. Il est très facile de passer de la forme exponentielle à la forme algébrique :

$$z = re^{i\theta} = \underbrace{r \cos \theta}_a + i \underbrace{r \sin \theta}_b$$

Méthode – Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ un complexe non nul sous forme algébrique dont on cherche la forme exponentielle.

1. On calcule le module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. On factorise par $|z|$:

$$z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$$

puis on cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{|z|} = \cos \theta$ et $\frac{b}{|z|} = \sin \theta$.

3. On en déduit que $z = |z|e^{i\theta}$, qui est la forme exponentielle recherchée.

Exemple. Mettre sous forme exponentielle le complexe $z = \sqrt{3} - i$

Remarque. Entre les formes algébrique et exponentielle, **quelle forme est la plus adaptée ?** Cela dépend de la situation :

- La **forme algébrique** est très pratique pour calculer des **sommes**, notamment grâce à la linéarité de “Re” et de “Im”. Elle est moins pratique pour les produits, et est très inadéquate pour des puissances élevées : calculer directement $(a + ib)^{10}$ est une mauvaise idée.
- La **forme exponentielle** est parfaite pour calculer des **produits** et des **puissances**, notamment grâce au 5.25. Cependant, elle est peu adaptée au calcul de sommes : calculer directement $re^{i\theta} + r'e^{i\theta'}$ est en général une mauvaise idée.

5.27 ★★ Donner la forme algébrique de $(1 - i)^{10}$.

Solution.

4 Application des complexes à la trigonométrie

4.1 Linéarisation

Théorème 5.28 – Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

La linéarisation consiste à transformer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en somme de termes de la forme $\cos(k\theta)$ et/ou $\sin(k\theta)$ avec k un entier. Cela permet ensuite de calculer facilement des intégrales, dérivées, sommes, etc. car toutes ces opérations sont... linéaires !

Méthode – Linéarisation

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour linéariser, par exemple, $\cos^n \theta$:

1. Par les formules d'Euler, on exprime $\cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n$, idem si c'est $\sin^n \theta$.
2. On développe avec la formule du binôme de Newton.
3. On regroupe les exponentielles conjuguées ($e^{ik\theta}$ avec $e^{-ik\theta}$), en appliquant Euler dans l'autre sens.

5.29



Calculer $\int_0^{2\pi} \sin^4(\theta) d\theta$.

Solution.

4.2 Dé-linéarisation

Méthode – **Transformer** $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en somme de $\cos^k \theta$ et/ou $\sin^k \theta$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour délinéariser, par exemple, $\sin(n\theta)$:

1. On utilise la formule de Moivre : $\sin(n\theta) = \operatorname{Im} \left(e^{in\theta} \right) = \operatorname{Im} ((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$.
2. On développe $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ avec la formule du binôme de Newton.
3. On ne garde que la partie imaginaire pour avoir $\sin(n\theta)$.
4. On transforme éventuellement les sin et cos avec $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

5.30 ★★ Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(4\theta)$ comme un polynôme en $\cos \theta$. En déduire une expression des 4 racines du polynôme $P(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ en utilisant la fonction cosinus.

Solution.

4.3 Méthode de l'angle moitié et nouvelles formules de trigonométrie

Pour calculer une somme du type $re^{ia} + r'e^{ib}$, il est conseillé de passer par la forme algébrique. Toutefois, pour mettre sous forme exponentielle une expression du type $e^{ia} \pm e^{ib}$, on peut utiliser la méthode de l'angle moitié :

Méthode – **Angle moitié**

Soit a et b deux réels. Pour calculer $e^{ia} \pm e^{ib}$, on factorise cette expression par $e^{i\frac{a+b}{2}}$ puis on utilise une formule d'Euler.

5.31



On pose $x = \frac{\pi}{9}$. Mettre $\frac{e^{ix} + e^{-2ix}}{e^{-ix} - e^{i2x}}$ sous forme exponentielle.

Solution.

Théorème 5.32 – Formules $\cos a \pm \cos b$ et $\sin a \pm \sin b$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \cos a + \cos b &= 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) & \sin a + \sin b &= 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) & \sin a - \sin b &= 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

Remarque. Plutôt que d'apprendre ces formules, il vaut mieux apprendre comment les retrouver. Leur usage est suffisamment marginal pour que cela suffise :

Démonstration. On ne montre que les formules $\cos a + \cos b$ et $\sin a + \sin b$:

Pour les formules $\cos a - \cos b$ et $\sin a - \sin b$, il faut partir de $e^{ia} - e^{ib}$ et suivre le même cheminement. Attention, c'est un peu plus subtil ! A faire en exercice. $\square$

5 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

5.1 Racine carrée d'un nombre complexe

Définition 5.33

Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de ω si $z^2 = \omega$.

Théorème 5.34

Tout complexe $\omega \neq 0$ admet exactement deux racines carrées. Si z est une racine carrée, l'autre est $-z$.
Si $\omega = 0$, alors l'unique racine carrée de ω est 0.

Exemple. • Les racines carrées de -1 sont i et $-i$.

- Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}^*$, les racines complexes de a sont $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$.
- Les racines carrées (au sens complexe) de 4 sont 2 et -2 : attention, on a toujours $\sqrt{4} = 2$: par convention, la valeur de $\sqrt{x}$ avec $x \in \mathbb{R}_+$ correspond à la racine carrée qui est positive.



Si $\omega \in \mathbb{C}$ et $\omega \notin \mathbb{R}_+$, on ne PEUT PAS écrire " $\sqrt{\omega}$ ". Cela n'est possible QUE SI $\omega \in \mathbb{R}_+$. On ne DOIT PAS écrire " $\sqrt{-1}$ " ou " $\sqrt{i}$ ".

Méthode – Calcul d'une racine carrée

Étant donné $\omega \in \mathbb{C}^*$, on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = \omega$.

- Sous forme exponentielle : si $\omega = re^{i\theta}$, alors les racines sont simplement

$$\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$$

- Sous forme algébrique : si ω est sous forme algébrique, on pose $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Puis, comme $z^2 = \omega$, on peut écrire

$$\begin{cases} |z|^2 = |\omega| \\ \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re} \omega \\ \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im} \omega \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = |\omega| \\ a^2 - b^2 = \operatorname{Re} \omega \\ 2ab = \operatorname{Im} \omega \end{cases}$$

Les deux premières lignes déterminent les valeurs a^2 et b^2 . Ainsi, a et b sont déterminés au signe près : il y a donc 4 valeurs possibles pour le couple (a, b) . Ensuite, la dernière ligne $2ab = \operatorname{Im} \omega$ donne le signe de ab . Cela ne laisse que deux valeurs possibles pour (a, b) . Si (a_0, b_0) est une de ces deux valeurs, l'autre est $(-a_0, -b_0)$. Les racines carrées de ω sont alors :

$$a_0 + ib_0 \quad \text{et} \quad -a_0 - ib_0$$

Lorsque c'est possible, il vaut mieux toujours passer par la forme exponentielle pour trouver les racines carrées.

5.35 ★★ Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $u = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et de $v = 8 - 6i$.

Solution.

5.2 Équations du second degré à coefficients complexes

Théorème 5.36

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. On cherche les racines du polynôme $P(z) := az^2 + bz + c$. On introduit le discriminant du trinôme P qui est un nombre *complexe* :

$$\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$$

- Si $\Delta \neq 0$, alors Δ admet deux racines carrées qu'on notera δ et $-\delta$. Dans ce cas les racines de P sont :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

et on peut écrire :

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$

- Si $\Delta = 0$, alors P admet une unique racine (double) : $z_0 = -\frac{b}{2a}$. Dans ce cas, on a

$$P(z) = a(z - z_0)^2$$

Remarque (Cas particuliers pour les racines de Δ).

- Si $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$, alors on peut prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$, l'autre racine étant $-\delta = -\sqrt{\Delta}$: comme dans le cas réel, on a bien deux racines (qui peuvent encore être complexes si a et b sont complexes)
- Si $\Delta \in \mathbb{R}_-^*$, alors on peut prendre $\delta = i\sqrt{|\Delta|}$, l'autre racine étant $-\delta = -i\sqrt{|\Delta|}$: il y a là encore deux racines distinctes (mais pas nécessairement conjuguées).

Attention, si $\Delta \notin \mathbb{R}$, alors il ne faut surtout pas écrire " $\Delta > \dots$ " ou " $\Delta < \dots$ ", pas plus que " $\sqrt{\Delta}$ " si $\Delta \notin \mathbb{R}_+$.

5.37 ★ Résoudre $z^2 + (2 + i)z - \frac{5}{4} + \frac{5}{2}i = 0$.

Solution.

Théorème 5.38 – Factorisation et racine

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$. Si P admet a pour racine, c'est-à-dire si $P(a) = 0$, alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que

$$P(z) = (z - a)Q(z)$$

Pour trouver Q , on peut procéder par identification comme pour un polynôme réel. C'est notamment utile lorsqu'on veut factoriser un polynôme après avoir trouvé une racine évidente.

Exemple. Le polynôme $z^3 + (i - 1)z^2 + (2 - i)z - 2$ admet 1 comme racine évidente. Ainsi

$$z^3 + (i - 1)z^2 + (2 - i)z - 2 = (z - 1)(\dots\dots\dots)$$

et si on veut trouver les autres racines, on peut calculer le discriminant du trinôme ci-dessus.

5.3 Relations coefficients racines

Théorème 5.39 – Somme et produit des racines

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$.

1. On note z_1 et z_2 les deux racines de $az^2 + bz + c = 0$, éventuellement confondues si $\Delta = 0$. Alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Réciproquement, pour tous complexes $S, P \in \mathbb{C}$, les solutions du système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}$$

sont exactement les solutions de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$.

5.40



Résoudre $\begin{cases} u + v = i \\ uv = 2 \end{cases}$

Solution.

5.4 Racines n -ième de l'unité

Définition 5.41

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un complexe z vérifiant $z^n = 1$ est appelé racine n -ième de l'unité.

Notation. On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Exemple. • 1 est toujours une racine n -ième de l'unité quel que soit n .

- $i^4 = 1$ donc i est une racine 4-ième de l'unité.
- $i^8 = i^4 i^4 = 1$ donc i est aussi une racine 8-ième de l'unité.

Remarque. Si $z^n = 1$, alors $|z|^n = 1$, donc $|z| = 1$. Ainsi, $z \in \mathbb{U}$. Autrement dit, on a toujours $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Théorème 5.42 – Détermination de $\mathbb{U}_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il y a exactement n racines n -ièmes de l'unité, ou encore n éléments dans $\mathbb{U}_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_n &= \left\{ 1, \quad e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad e^{i\frac{4\pi}{n}}, \quad e^{i\frac{6\pi}{n}}, \quad \dots, \quad e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right\}\end{aligned}$$

Démonstration.

□

Les racines n -ièmes de l'unité se répartissent de manière équidistantes sur le cercle unité, chacune étant écartée d'un angle $\frac{2\pi}{n}$ avec la suivante et la précédente :

5.5 Racines n -ième d'un complexe ω

Définition 5.43

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n -ième de ω tout nombre complexe z tel que $z^n = \omega$.

Avec $\omega = 1$, on retrouve les racines n -ièmes de l'unité (qui ne sont donc rien d'autre que les racines n -ièmes du nombre complexe 1).

Théorème 5.44 – Calcul d'une racine n -ième

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout complexe $\omega \neq 0$ admet exactement n racines carrées : en posant $\omega = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les racines n -ièmes de ω sont :

$$r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}, \quad r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{4\pi}{n}}, \quad \dots \quad r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

Si $\omega = 0$, alors l'unique racine n -ième de ω est 0.

Il suffit donc de prendre une racine n -ième de ω , typiquement $r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$, et de multiplier cette racine par toutes les racines n -ièmes de l'unité pour avoir toutes les racines n -ièmes de ω .

5.45 ★★ Résoudre $z^3 = 2i$.

Solution.

6 Exponentielle complexe

Définition 5.46

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le complexe exponentielle de z , noté e^z ou $\exp(z)$ est défini par

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}$$

On remarquera qu'ainsi défini, e^z se trouve sous la forme exponentielle :

$$e^z = \underbrace{e^{\operatorname{Re} z}}_{r>0} \underbrace{e^{i \operatorname{Im} z}}_{e^{i\theta}}$$

On a donc $|e^z| = r = e^{\operatorname{Re} z}$ et $\arg(e^z) \equiv \operatorname{Im} z \pmod{2\pi}$. Il suffit de garder cela en tête pour s'en sortir dans les exercices.

Théorème 5.47 – Propriétés de l'exponentielle complexe

Pour tous $z, u, v \in \mathbb{C}$,

1. $e^z \in \mathbb{C}^*$
2. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}} = e^{\operatorname{Re} z} e^{-i \operatorname{Im} z}$
3. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
4. $e^{u+v} = e^u e^v$ et $e^{u-v} = \frac{e^u}{e^v}$

5.48 ★★ Résoudre $e^z = \sqrt{3} + i$ dans $\mathbb{C}$.

Solution.

7 Géométrie – alignement, orthogonalité de vecteurs

Dans cette section, pour simplifier le propos, on confond un complexe z avec le point d'affixe $M(z)$. On pourra donc dire “le point z ” au lieu du point $M(z)$.

7.1 Cercle et disque du plan complexe

Définition 5.49 – Cercle et disque

Soit A un point du plan complexe d'affixe $a \in \mathbb{C}$, et $r \geq 0$. On note :

$$C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$$

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$$

Cet ensemble correspond au cercle de centre A et de rayon r .

Cet ensemble correspond au disque de centre A et de rayon r .

La valeur $|z - a|$ représente la distance entre z et a . $C(a, r)$ est donc l'ensemble des complexes z situés à une distance r de a : c'est bien le cercle de centre a et de rayon r .

Exemple. $\mathbb{U}$ correspond au cercle $C(0, 1)$.

7.2 Propriétés de l'argument

Théorème 5.50 – Calculs avec arg

Soit $u, v \in \mathbb{C}^*$. Alors

- $\arg \bar{u} \equiv -\arg u \ [2\pi]$
- $\arg(uv) \equiv \arg u + \arg v \ [2\pi]$
- $\arg \frac{u}{v} \equiv \arg u - \arg v \ [2\pi]$
- $\arg(u^n) \equiv n \arg u \ [2\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Il existe $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $u = re^{i\theta}$ et $v = r'e^{i\theta'}$. Pour montrer ces formules, il suffit de mettre $\bar{u}$, uv , $\frac{u}{v}$ et u^n sous forme exponentielle pour calculer des arguments. Montrons par exemple que $\arg(uv) \equiv \arg u + \arg v \ [2\pi]$.

□

Remarque. Étant donné $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a donc
$$\begin{cases} \arg(e^{i\theta}z) \equiv \theta + \arg(z) \ [2\pi] \\ |e^{i\theta}z| = |z| \end{cases}$$

Ainsi :

- Le complexe $e^{i\theta}z$ s'obtient par **une rotation d'angle θ** à partir de z .
- Le complexe $-z = ze^{i\pi}$ s'obtient par une rotation d'angle π à partir de z .
- Le complexe $iz = ze^{i\frac{\pi}{2}}$ s'obtient par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ à partir de z .

Exemple. Avec $z = i$, on obtient que $iz = i^2 = -1$ correspond bien à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ à partir de i .

Théorème 5.51 – Caractérisation des réels et imaginaires purs par l'argument

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- $\arg z \equiv 0 [2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_+^*$
- $\arg z \equiv \pi [2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_-^*$
- $\arg z \equiv 0 [\pi] \iff z \in \mathbb{R}^*$
- $\arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff z \in i\mathbb{R}^*$

7.3 Alignement de vecteurs

On considère trois points **distincts** A, B et C du plan complexe, d'affixe respectives z_A, z_B et z_C (distinctes). On peut utiliser les nombres complexes pour mesurer l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Tout d'abord, on définit les points $M(z_B - z_A)$ et $N(z_C - z_A)$.
On constate alors que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$$

Maintenant, si on note $\vec{u}$ le vecteur $(1, 0)$, une simple relation de Chasles fournit :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) &= (\vec{u}, \overrightarrow{ON}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \\ &\equiv \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) [2\pi] \end{aligned}$$

Si bien que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

Théorème 5.52

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B , et z_C , avec $z_A \neq z_B$ et $z_A \neq z_C$. On a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

Corollaire 5.53

Avec les mêmes hypothèses que le Théorème ci-dessus,

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ sont alignés} &\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [\pi] \\ &\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux} &\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

Dans un exercice de géométrie complexe, un calcul d'un quotient est souvent le coeur du problème.

5.54 ★★ Soit A, B, C des points d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = 2 - 2i$. Donner la nature du triangle ABC .

Solution.

8 Méthodes pour les exercices

Méthode

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Pour montrer que z est réel, on peut :

- Montrer que $\text{Im}z = 0$.
- Montrer que $z = \bar{z}$.
- Si $z \neq 0$, montrer que $\arg(z) \equiv 0 \pmod{\pi}$

Pour montrer que z est imaginaire pur, on peut :

- Montrer que $\text{Re}z = 0$.
- Montrer que $z = -\bar{z}$.
- Si $z \neq 0$, montrer que $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

Méthode

La forme algébrique est utile pour calculer :

- (++) des sommes / différences
- (ok) des produits / quotients
- (bof) des puissances / racines carrées
- (--) des puissances / racines n -ièmes

La forme exponentielle est utile pour calculer :

- (bof) des sommes / différences
– (ok) avec l'angle moitié
- (++) des produits / quotients
- (++) des puissances / racines n -ièmes